СХОДИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО ТИПА

М. РАДЖЮНАС

Department of Mathmatics, Vilnius University
Naugarduko 24, Vilnius 2006, Lithuania

Рассматриваем первую и вторую краевые задачи для системы нелинейных уравнений шредингеровского типа:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=A\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+iB\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+\vec{f}(\vec{u},\vec{u}^*) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\vec{u}(x,0)=\vec{u}_0(x), \qquad x\in\Omega \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\vec{u}(0,t)=\vec{u}(1,t)=0, \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}(1,t)=0, \qquad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Здесь $\Omega=(0,1)$; $Q=\Omega\times(0,T)$; A,B есть n–мерные вещественные диагональные постоянные матрицы, $B>0$, $\vec{u}(x,t)=(u_1,\dots,u_n)$, $\vec{f}=(f_1,\dots,f_n)$. Здесь u_i, f_i принимают комплексные значения. Будем считать, что выполняются следующие условия: Функции $f_i(\vec{u},\vec{u}^*)$ есть полиномиальные функции от переменных u_j и u_j^*, тогда существует такая непрерывная неубывающая функция $\varphi(y)$, что

$$|f_i(\vec{u},\vec{u}^*)|\le|\vec{u}|\varphi(|\vec{u}|), \quad \left|\frac{\partial^{|\vec{j}|}f_i(\vec{u},\vec{u}^*)}{\partial\vec{u}^{\vec{j}}}\right|\le\varphi(|\vec{u}|), \ \forall i. \tag{5}$$

Здесь $|\vec{j}|=1,2$, $|\vec{u}|=\max\limits_i\{|u_i|\}$. Для первой краевой задачи $\vec{u}_0\in W_2^2\cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ и существует решение $\vec{u}(x,t)$ такое, что

$$\vec{u}\in L_\infty\left(0,T;W_2^2\cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)\right), \ \|\vec{u}\|_{C(\bar{Q})}=\max_i\left\{\|u_i\|_{C(\bar{Q})}\right\}<\infty. \tag{6}$$

Для второй краевой задачи $\vec{u}_0\in W_2^2(\Omega)$ и существует решение $\vec{u}(x,t)$ такое, что

$$\vec{u}\in L_\infty\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right), \quad \|\vec{u}\|_{C(\bar{Q})}=\max_i\left\{\|u_i\|_{C(\bar{Q})}\right\}<\infty. \tag{7}$$

Системы нелинейных уравнений шредингеровского типа возникают во многих моделях нелинейной оптики, в моделях биомолекулярных систем. Они также встречаются в квантовой механике и других областях науки.

Для выше приведенной задачи конструируется разностная схема, доказывается ее сходимость и устойчивость. Здесь, как и в работах [1],[2], в доказательствах используются априорные оценки нового типа. Сходимость и устойчивость получаем независимо от отношения между временным и пространственным шагами сетки.

В отличие от работ [1],[2], в данной работе мы не пробуем отказаться от слагаемого $A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$. Если в случае первой краевой задачи мы можем с помощью простого преобразования отказаться от этого слагаемого, то в случае второй краевой задачи это не так просто. Из за этого слагаемого мы не можем применять собственные функции линейного дифференциального оператора для достижения априорных оценок, как это делается в работах [1],[2].

Мы строим следующие разностные схемы типа Кранка–Никольсона для наших краевых задач. Здесь мы имеем уравнения (8),(9),(11) для второй краевой задачи (1),(2),(4):

$$\vec{\rho}_t = A\dot{\vec{\rho}}_{\dot{x}} + iB\dot{\vec{\rho}}_{\bar{x}x} + \vec{f}\left(\dot{\vec{\rho}},\dot{\vec{\rho}}^*\right), \quad (x,t)\in Q_{1h}, \quad \left((x,t)\in Q_{2h}\right) \tag{8}$$

$$\vec{\rho}(x,0)=\vec{u}_0(x), \quad x\in\omega_{1h} \quad \left(x\in\omega_{2h}\right) \tag{9}$$

$$\vec{\rho}(x_0,t)=\vec{\rho}(x_N,t)=0, \quad t\in\bar{\omega}_\tau, \tag{10}$$

$$\vec{\rho}(x_0,t)=\vec{\rho}(x_1,t), \quad \vec{\rho}(x_N,t)=\vec{\rho}(x_{N+1},t), \quad t\in\bar{\omega}_\tau. \tag{11}$$

Здесь мы определяем сеточные области $Q_{1h}=\omega_{1h}\times\omega_\tau$, $Q_{2h}=\omega_{2h}\times\omega_\tau$, $h=1/N$, $\tau=T/M$,

$t_i=i\tau$, $\omega_\tau=\{t_i; i=0,...,M-1\}$, $\bar{\omega}_\tau=\{t_i; i=0,...,M\}$, $\omega_{1h}=\{x_i=ih,\ i=1,...,N-1\}$,

$\omega_{2h}=\{x_i=(i-0.5)h,\ i=1,...,N\}$

Мы обозначаем $p=p_i^j=p(x_i,t_j)$, $p_{\bar{x}x}=(p_x-p_{\bar{x}})/h$, $p_x=\left(p_{i+1}^j-p_i^j\right)/h$, $p_{\bar{x}}=\left(p_i^j-p_{i-1}^j\right)/h$,

$p_{\dot{x}}=\left(p_{i+1}^j-p_{i-1}^j\right)/2h$, $\hat{p}=p_i^j$, $\dot{p}=(p+\hat{p})/2$, $p_t=(\hat{p}-p)/\tau$, $\vec{\rho}=(p_1,...,p_n)$.

Оказывается, что для функции $\vec{f}$ в разностном случае справедливы следующие свойства:

Лемма 1. *Пусть* $\vec{f}\left(\vec{u},\vec{u}^*\right)$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\vec{w},\vec{v}\in W_{2h}^1$. *Тогда* $\forall i=1,...,n$ *для обеих задач справедливы оценки:*

$$\left\|f_i\left(\vec{v},\vec{v}^*\right)\right\|_{L_{2h}}\le\varphi\left(\|\vec{v}\|_C\right)\|\vec{v}\|_{L_{2h}},$$

$$\left\|f_i\left(\vec{v},\vec{v}^*\right)-f_i\left(\vec{w},\vec{w}^*\right)\right\|_{L_{2h}}\le 2\sqrt{n}\,\varphi\left(\max\left\{\|\vec{v}\|_C,\|\vec{w}\|_C\right\}\right)\|\vec{v}-\vec{w}\|_{L_{2h}},$$

$$\left\|f_i\left(\vec{v},\vec{v}^*\right)\right\|_{W_{2h}^1}\le 2\sqrt{n}\,\varphi\left(\|\vec{v}\|_C\right)\|\vec{v}\|_{W_{2h}^1},$$

$$\left\|f_i\left(\vec{v},\vec{v}^*\right)-f_i\left(\vec{w},\vec{w}^*\right)\right\|_{W_{2h}^1}\le 4n\,\varphi\left(\max\left\{\|\vec{v}\|_C,\|\vec{w}\|_C\right\}\right)\left(1+2c_3\|\vec{w}\|_{W_{2h}^1}\right)\|\vec{z}\|_{W_{2h}^1}.$$ *Здесь* $\vec{z}=\vec{v}-\vec{w}$.

В случае разностных уравнений, так же как и в случае дифференциальных уравнений, мы можем получить следующие априорные оценки

Лемма 2. *Пусть для обеих задач выполнено условие* (5). *Тогда существует* $\tau_0>0$ *такое, что* $\forall\tau$, $0<\tau\le\tau_0$ *справедливы оценки:*

$$\left\|\vec{\rho}(t_j)\right\|_{W_{2h}^1}\le c\left\|\vec{\rho}(t_0)\right\|_{W_{2h}^1},$$

где $$c=c\left(A,B,n,t_j,\varphi\left(\|\vec{\rho}\|_{C(\bar{Q}_t)}\right)\right),\quad \tau_0=\tau_0\left(A,B,n,\varphi\left(\|\vec{\rho}\|_{C(\bar{Q}_t)}\right)\right)$$

Когда мы решаем разностные уравнения, для нахождения значений решения на очередном временном слое мы решаем алгебраическую систему нелинейных уравнений. Для этого мы строим итерационный процесс. В случае первой краевой задачи:

В случае второй краевой задачи

$$\frac{\vec{\rho}^{k+1}-\vec{\rho}}{\tau}=\frac{A}{2}\left(\vec{\rho}_{\dot{x}}^{k+1}+\vec{\rho}_{\dot{x}}\right)+\frac{iB}{2}\left(\vec{\rho}_{\dot{x}x}+\vec{\rho}_{\dot{x}x}\right)+f\left(\frac{\vec{\rho}^{k}+\vec{\rho}}{2},\frac{\vec{\rho}^{k*}+\vec{\rho}^{*}}{2}\right),\ x\in\omega_{2h},$$

$$\vec{\rho}^{0}=\vec{\rho},\ \vec{\rho}_{0}^{k+1}=\vec{\rho}_{1}^{k+1},\ \vec{\rho}_{N}^{k+1}=\vec{\rho}_{N+1}^{k+1}. \tag{13}$$

Оказывается, что мы действительно можем применить эти процессы и для них справедлива

Лемма 3. *Пусть в обеих случаях выполнены условия* $\vec{\rho}\in \overset{0}{W}{}_{2h}^{1}\cap W_{2h}^{2}$ (или $\vec{\rho}\in W_{2h}^{1}$), $\vec{f}(\vec{\rho},\vec{\rho}^{*})\in W_{2h}^{1}$. $\|\vec{\rho}\|_{W_{2h}^{1}}\le\alpha$. *Тогда из итерационного процесса* (12) (*или* (13)) *мы получаем последовательность функций* $\left\{\vec{\rho}^{k}\right\}$, $k=0,1,\ldots$, *сходящуюся к решению задачи* (1)–(3) *или* ((1),(2),(4)) *в пространстве* W_{2h}^{2}. *Существует единственное решение* $\hat{\vec{\rho}}$ *разностных задач с условием* $\|\hat{\vec{\rho}}\|=O(1)$, *когда* $\tau\to0$. *К тому же существует* $\tau_0>0$ *такое, что* $\forall\tau,\ 0<\tau<\tau_0,\ \forall k$ *справедливы оценки:*

$$\left\|\vec{\rho}^{k}\right\|_{W_{2h}^{1}}\le c\|\vec{\rho}\|_{W_{2h}^{1}},\quad \left\|\hat{\vec{\rho}}\right\|_{W_{2h}^{1}}\le c\|\vec{\rho}\|_{W_{2h}^{1}}.\quad \text{Здесь } c=c(A,B),\quad \tau_0=\tau_0(A,B,\alpha,\varphi).$$

Предположим, что в обоих случаях решение $\vec{u}(x,t)$ есть достаточно гладкое, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\max_{0\le j\le M-1}\left\{\left\|\vec{\Phi}(t_j)\right\|_{W_{2h}^{1}}\right\}\to0,\qquad \tau,h\to0, \tag{14}$$

где $\vec{\Phi}(t_j)$ есть ошибка аппроксимации разностных схем. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (5), (6) (*или* (7), (8)) *для задачи* (1)–(3) (*или* (1), (2),(4)). *Тогда решение* $\vec{\rho}$ *задачи* (8)–(10) (*или* (8), (9), (11)) *сходится к решению* $\vec{u}$ *в норме пространства* $L_\infty\left(0,T;W_{2h}^{1}\right)$ и $\exists\tau_0,h_0>0$ *такие, что* $\forall\tau,\ 0<\tau\le\tau_0,\ \forall h,\ 0<h\le h_0$ *для* $\vec{\varepsilon}=\vec{u}-\vec{\rho}$ *в области* Q_{1h} (*или* Q_{2h}) *мы имеем оценку:*

$$\max_{0\le j\le M}\left\{\left\|\vec{\varepsilon}(t_j)\right\|_{W_{2h}^{1}}\right\}\le c_1\max_{0\le j\le M-1}\left\{\left\|\vec{\Phi}(t_j)\right\|_{L_{2h}}\right\}.\quad \text{Здесь } c_1=c_1\left(A,B,\|\vec{u}\|_{C(\overline{Q})},\|\vec{u}_0\|_{W_{2h}^{1}},\varphi\right).$$

Теорема 2. *Предроложим, что* $\vec{u}_1(x,t)$ *и* $\vec{u}_2(x,t)$ *есть два решения задачи* (1)–(3) (*или* (1), (2), (4)) *с начальными условиями* $\vec{u}_{10}$ *и* $\vec{u}_{20}u_{20}$. *Пусть выполнены условия* (5), (6) (*или* (7)), (14) *для обеих случаев. Тогда* $\exists\tau_0,h_0>0$ *такие, что* $\forall\tau,\ 0<\tau\le\tau_0,\ \forall h,\ 0<h\le h_0$ *справедливы следующие оценки для решений задачи* (5)–(7) (*или* (5), (6), (8)):

$$\max_{0\le j\le M}\left\{\left\|(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)(t_j)\right\|_{W_{2h}^{1}}\right\}\le c_2\|\vec{u}_{10}-\vec{u}_{20}\|_{W_{2h}^{1}}.\qquad \text{Здесь } c_2=c_2\left(A,B,\|\vec{u}_1\|_{C(\overline{Q})},\|\vec{u}_2\|_{C(\overline{Q})},\varphi\right).$$

Литература

1 F. Ivanauskas. The convergence and stability of difference schemes for a sistem of nonlinear Schrodinger tipe equations. Lith. Math. J. 1991, 31, p. 606–621.
2 F. Ivanauskas. On convergence of difference schemes for nonlinear Schrodinger equation, the Kuramoto–Tsuzuki equation and Reaction–Diffusion type systems. Lith. Math. J., 1994, 34, p. 30–44.
3. M. Radziunas. On convergence and stability of difference schemes for nonlinear Schrodinger type equations. Lith. Math. J., 1996, 36, p. 224–244.